

Chapitre 3

Frottements et balistique



3.1 Forces de frottement

3.1.1 Frottements secs

3.1.2 Frottements visqueux

3.2 Balistique sans frottement

3.2.1 Démarche de résolution

3.2.2 Poids

3.2.3 Loi du mouvement balistique

3.2.4 Repère et conditions initiales

3.2.5 Equations du mouvement balistique

3.2.7 Trajectoire balistique

3.3 Balistique avec frottement

3.3.1 Loi du mouvement balistique

3.2.2 Repère et conditions initiales

3.3.3 Equations du mouvement balistique

3.3.4 Mouvement balistique horizontal

3.3.5 Mouvement balistique vertical

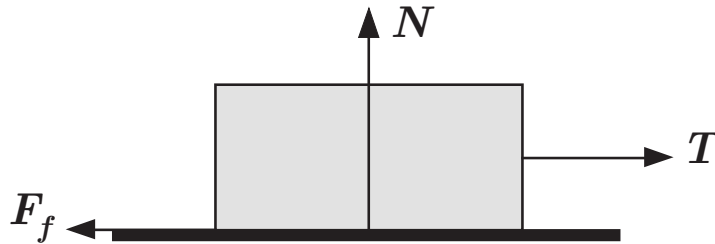
3.1 Forces de frottement

3.1.1 Frottements secs

3.1.2 Frottements visqueux

- **Force de frottement sec** : force de frottement entre deux surfaces solides en contact qui s'oppose au mouvement.

- 1 **Force de frottement statique** : $\|F_f\| = \|T\|$



- **de Vinci** : force de frottement maximale

- 1 $\|F_{f \max}\| \propto \|m g\| = \|N\|$

- 2 $\|F_{f \max}\|$ indépendante de l'aire de contact

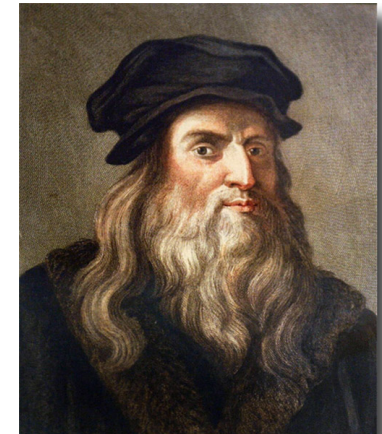
- **de Coulomb** : loi phénoménologique

$$\|F_f\| \leq \mu_s \|N\| \quad (3.1)$$

- 1 Coefficient de frottement statique μ_s
(matériaux, rugosité, humidité)
- 2 Force de réaction normale N

Léonard de Vinci

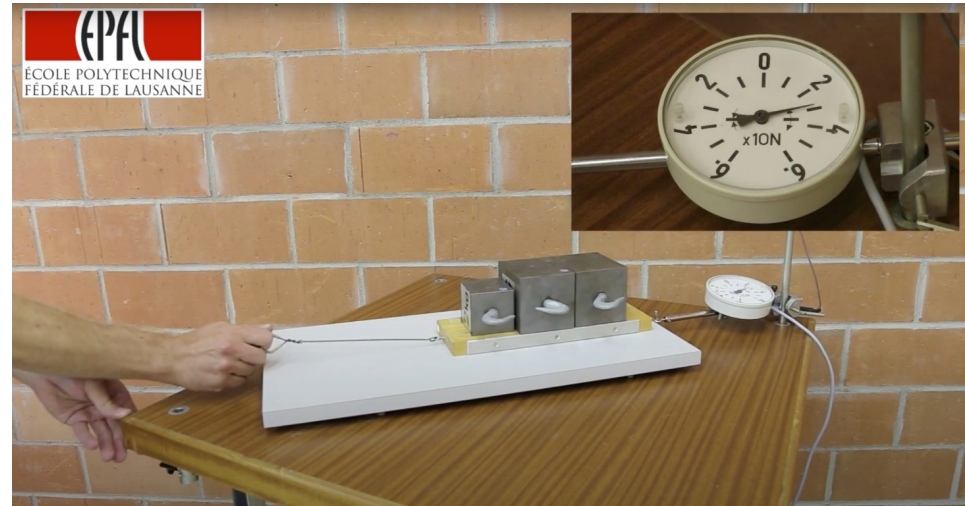
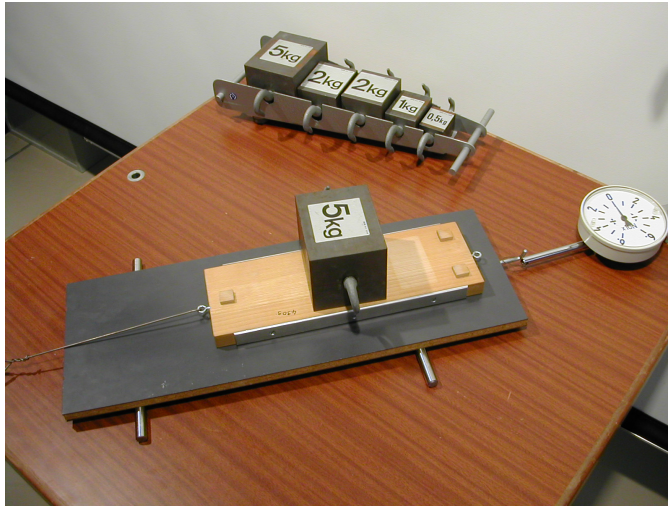
1452 – 1519



Charles de Coulomb

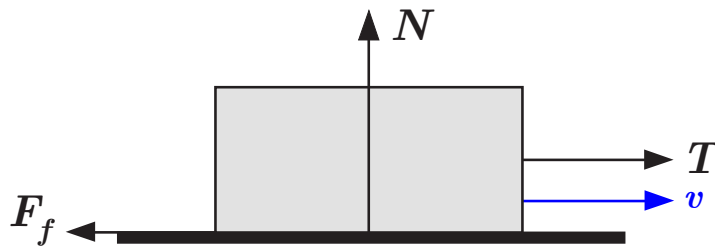
1736 – 1806





- On mesure la valeur maximale de la norme de la force de frottement statique $\|\mathbf{F}_{f \max}\|$ entre deux plaques.
- On tire sur la plaque supérieure avec une tension de norme $\|\mathbf{T}\|$ et on mesure la norme de la force de frottement statique $\|\mathbf{F}_f\| = \|\mathbf{T}\|$ sur le dynamomètre attaché à la plaque inférieure. On détermine la valeur maximale $\|\mathbf{F}_{f \max}\|$ juste avant le glissement.
- En ajoutant des poids sur la plaque supérieure, on montre que cette valeur maximale est proportionnelle à la norme du poids $\|\mathbf{mg}\|$ de la plaque supérieure et donc à la force de réaction normale $\|\mathbf{N}\|$ exercée par la plaque inférieure sur la plaque supérieure.

② Force de frottement cinétique : $\|F_f\| \leq \|T\|$



• **Amontons** : force de norme constante

① $\|F_f\|$ indépendante de la vitesse $\|v\|$

• **de Coulomb** : loi phénoménologique

$$F_f = -\mu_c \|N\| \hat{v} \quad \text{où} \quad \hat{v} = \frac{v}{\|v\|} \quad (3.2)$$

① Coefficient de frottement cinétique μ_c
(matériaux, rugosité, humidité)

② Force de réaction normale N

Guillaume Amontons

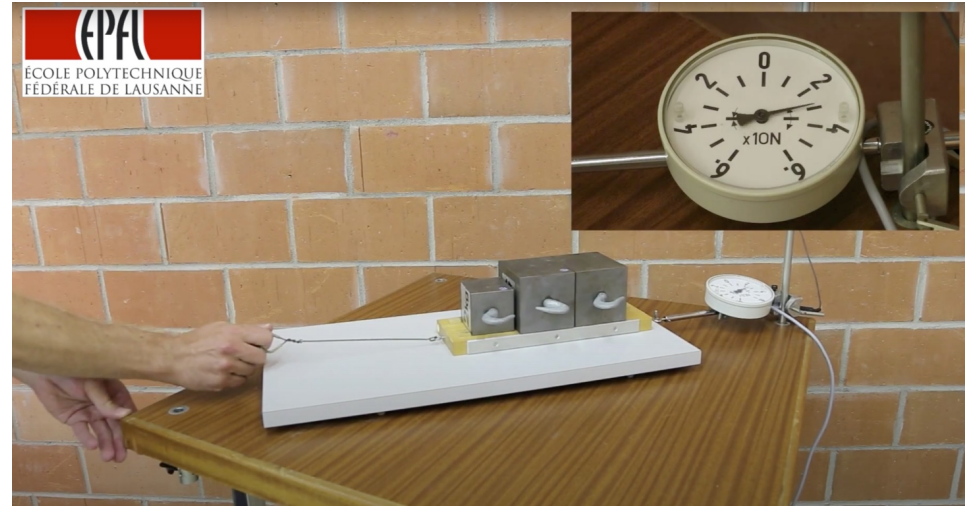
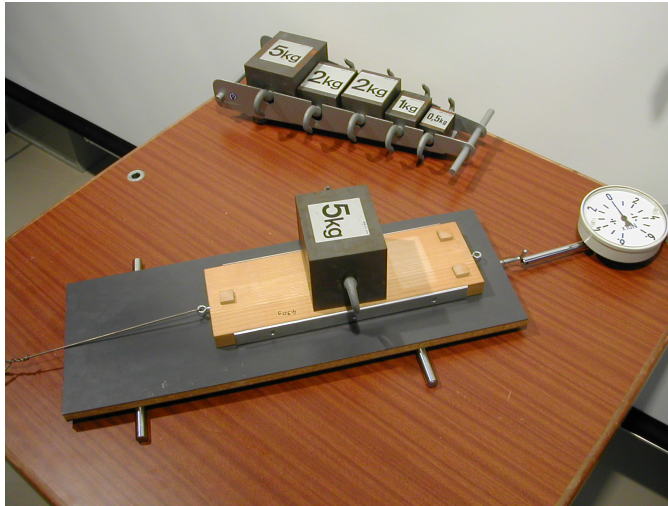
1663 – 1705



Charles de Coulomb

1736 – 1806





- On mesure la norme de la force de frottement cinétique $\|F_f\|$ entre deux plaques. On tire sur la plaque supérieure avec une tension de norme $\|T\|$ suffisante pour qu'il y ait glissement.
- On observe alors que la norme de la force de frottement $\|F_f\|$ diminue brusquement lorsqu'il y a glissement (à-coup), ce qui montre que le coefficient de frottement cinétique μ_c est inférieur au coefficient de frottement statique μ_s .
- On observe aussi que la norme de la force de frottement cinétique $\|F_f\|$ est indépendante de la valeur de la norme de la tension $\|T\|$.

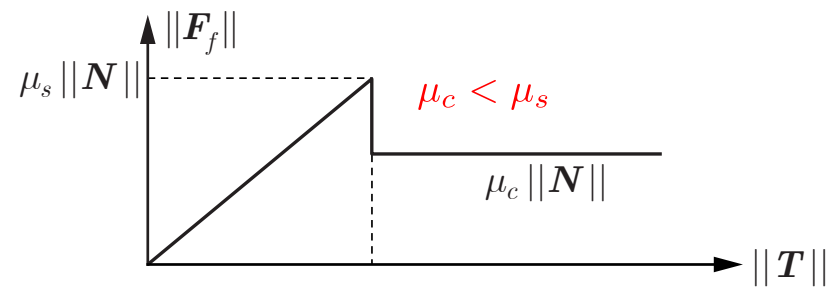
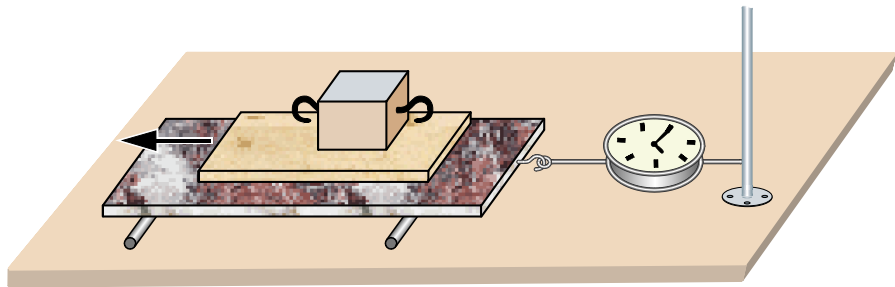


Table – Coefficients de frottement sec

Matériaux	Statique μ_s	Cinétique μ_c
Caoutchouc/Asphalte	1.0	0.8
Acier/Acier	0.74	0.57
Aluminium/Acier	0.61	0.47
Cuivre/Acier	0.53	0.36
Glace/Glace	0.1	0.03
Téflon/Téflon	0.04	0.03
Articulation humaine	0.01	0.003

- **Force de frottement visqueux** : force de frottement d'un solide en mouvement relatif par rapport à un fluide.

- 1 **Régime laminaire** : Loi de Stokes à faible vitesse

$$\mathbf{F}_f = -k \eta \mathbf{v} = -b \mathbf{v} \quad (3.3)$$

- Viscosité : η unité $[\text{N s m}^{-2}]$
- $k = 6\pi R$ où R : rayon d'une sphère

- 2 **Régime turbulent** : Traînée à vitesse élevée

$$\mathbf{F}_f = -\frac{1}{2} C_x A \rho v^2 \hat{\mathbf{v}} \quad (3.4)$$

- Coefficient de traînée : C_x
- Aire projetée : A
- Masse volumique du fluide : ρ

George Stokes
1819 – 1903

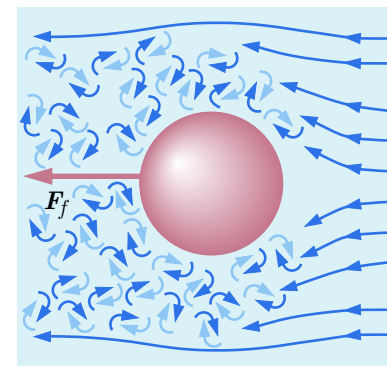
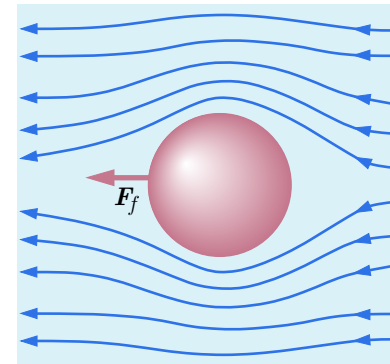
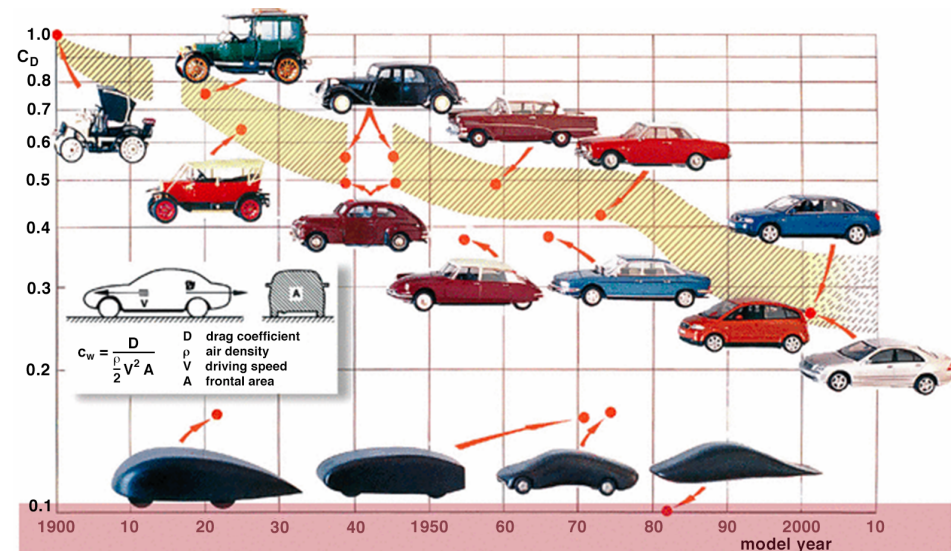
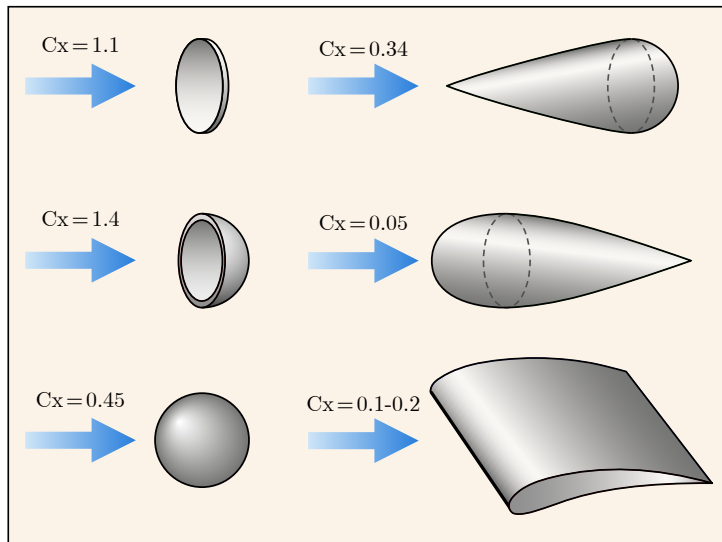


Table – Viscosité à 25°C

Substances	Viscosité η [N s m ⁻²]
Air	0.00002
Eau	0.0009
Sang	0.004
Huile	0.2
Miel	10
Ketchup	100
Verre	1000





- Un physicien place un fusil d'assaut dans une piscine et actionne la détente avec un fil en se plaçant dans la ligne de mire du fusil à l'autre bout de la piscine.
- Comme la viscosité de l'eau est 45 fois supérieure à la viscosité de l'air et que la force de frottement visqueux F_f est proportionnelle à la viscosité, la balle est entièrement freinée dans son mouvement et finit au fond de la piscine avant d'atteindre le physicien.
- Dans l'air, cette expérience aurait été fatale puisque la force de frottement visqueux F_f n'aurait pas eu suffisamment de temps pour ralentir suffisamment la balle.



- La viscosité η d'un liquide peut dépendre de la norme de la vitesse relative $\|v\|$ d'un objet par rapport au liquide. On appelle ce phénomène la viscoélasticité.
- 1 Si on brasse lentement de la Maïzena sa viscosité η est faible, mais en l'agitant rapidement elle se bloque car sa viscosité devient très grande.
- 2 En brassant un yogourt avec une cuillère sa viscosité η diminue car le yogourt devient plus liquide.



- On observe l'écoulement de l'eau autour de différents profils (sphère, aile d'avion, voiture) en faisant varier la vitesse relative.
- On distingue facilement les régimes laminaire et turbulent. On met en évidence le régime turbulent en détectant les tourbillons qui se forment à l'arrière de l'objet.
- On observe que les tourbillons augmentent avec la vitesse et dépendent de la forme de l'objet caractérisé par un coefficient de traînée C_x . L'aile d'avion est plus aérodynamique que la sphère.

3.2 Balistique sans frottement

- 3.2.1 Démarche de résolution
- 3.2.2 Poids
- 3.2.3 Loi du mouvement balistique
- 3.2.4 Repère et conditions initiales
- 3.2.5 Equations du mouvement balistique
- 3.2.7 Trajectoire balistique

- 1 **Choix du référentiel et du repère** : repère cartésien (balistique).
- 2 **Forces extérieures exprimées par rapport au repère** : poids (balistique sans frottement).
- 3 **Conditions initiales sur la position et la vitesse** : (général).
- 4 **Loi vectorielle du mouvement** : 2^e loi de Newton (point matériel).
- 5 **Projection de la loi du mouvement sur les axes de coordonnées** : équations différentielles scalaires du mouvement (général).
- 6 **Intégration des équations du mouvement** : équations de la vitesse et équations horaires (général).
- 7 **Combinaison des équations horaires** : équation de la trajectoire de l'objet (balistique).

- **Modèle** : champ d'attraction gravitationnel terrestre g [m s^{-2}] uniforme, constant et dirigé vers le bas (approximation à l'échelle du mouvement).
- **Poids** : objet de masse m

$$P = m g \quad (3.5)$$

- **Champ gravitationnel** : à la surface de la terre

① **Norme** :

$$\|g\| = g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

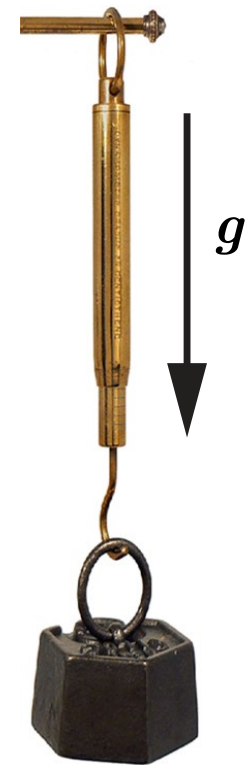
② **Altitude** :

$$h = 0 \text{ m}$$

③ **Latitude** :

$$\lambda = 45^\circ$$

- Le poids est une force extérieure car le champ gravitationnel g est extérieur à l'objet.



- **Loi du mouvement** : 2^e loi de Newton

$$F^{\text{ext}} = P = m a \quad (3.6)$$

- **Poids** : modèle

$$P = m g \quad (3.5)$$

- **Loi du mouvement balistique** :
sans frottement (ou négligeable)

$$a = g = \text{cste} \quad (3.7)$$

- **Loi indépendante de la masse** :
mouvement de chute libre
 - 1 Plume et bille de plomb
 - 2 Goutte d'eau et bille d'acier

Evangelista Torricelli

1608 – 1647



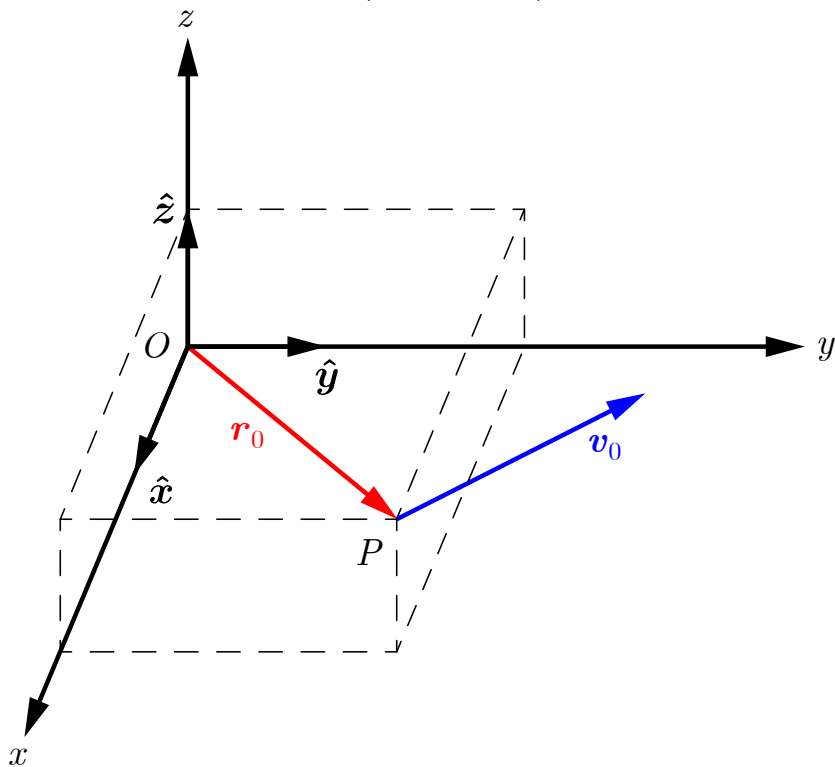


- 1 Lorsque'on fait le vide dans l'enceinte, la force de frottement visqueux F_f de l'air devient négligeable et l'accélération de la bille est la même que celle de la plume : $a = g$
- 2 Dans l'air, la force de frottement visqueux F_f n'est pas négligeable. Elle a pour effet de freiner davantage la plume. Les accélérations des deux objets ne sont plus les mêmes.



- Une bille en acier est lâchée sans vitesse initiale. Au même instant une goutte d'eau d'environ le même volume que la bille d'acier tombe d'un robinet à la même hauteur initiale. Le mouvement de chute libre des deux objets est parfaitement synchronisé.
- Comme la force de frottement de l'air est négligeable, l'accélération des deux objets est celle du champ gravitationnel même si la masse de la bille d'acier est environ 8 fois supérieure à celle de la goutte d'eau.

Repère cartésien

 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 

- Position initiale : $r(0) = r_0$

- $x(0) = x_0$

- $y(0) = y_0$

(3.8)

- $z(0) = z_0$

- Vitesse initiale : $v(0) = v_0$

- $\dot{x}(0) = v_x(0) = v_{0x}$

- $\dot{y}(0) = v_y(0) = v_{0y}$

(3.9)

- $\dot{z}(0) = v_z(0) = v_{0z}$

- **Loi du mouvement balistique sans frottement :**

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = \text{cste} \quad (3.7)$$

- **Projections :** grandeurs vectorielles dans le repère cartésien

$$① \quad \mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$② \quad \mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}$$

- **Equations du mouvement :** (3.7) repère cartésien

$$① \quad \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad \ddot{x} = 0$$

$$② \quad \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad \ddot{y} = 0 \quad (3.10)$$

$$③ \quad \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad \ddot{z} = -g = \text{cste}$$

- **Equations du mouvement :**

- ① selon $\hat{x}$: $\ddot{x} = 0$

- ② selon $\hat{y}$: $\ddot{y} = 0$

(3.10)

- ③ selon $\hat{z}$: $\ddot{z} = -g = \text{cte}$

- **Conditions initiales : vitesse**

- ① $\dot{x}(0) = v_{0x}$

- ② $\dot{y}(0) = v_{0y}$

(3.9)

- ③ $\dot{z}(0) = v_{0z}$

- **Equations de la vitesse : intégration de (3.10) avec (3.9)**

- ① $\dot{x} = v_{0x}$

- ② $\dot{y} = v_{0y}$

(3.11)

- ③ $\dot{z}(t) = -gt + v_{0z}$

- **Equations de la vitesse :**

- ① $\dot{x} = v_{0x}$

- ② $\dot{y} = v_{0y}$

(3.11)

- ③ $\dot{z}(t) = -gt + v_{0z}$

- **Conditions initiales : position**

- ① $x(0) = x_0$

- ② $y(0) = y_0$

(3.8)

- ③ $z(0) = z_0$

- **Equations horaires : intégration de (3.11) avec (3.8)**

- ① $x(t) = v_{0x}t + x_0$

(MRU)

- ② $y(t) = v_{0y}t + y_0$

(MRU) (3.12)

- ③ $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0$

(MRUA)

- Equation du mouvement balistique vertical :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \quad (3.12)$$

- Conditions initiales :

- 1 Position initiale : hauteur de chute

$$z(0) = z_0 = h$$

- 2 Vitesse initiale : nulle

$$v_{0z} = 0$$

- Temps de chute : $t = t_c$ avec $z(t_c) = 0$

$$z(t_c) = -\frac{1}{2}gt_c^2 + h = 0 \quad (3.13)$$

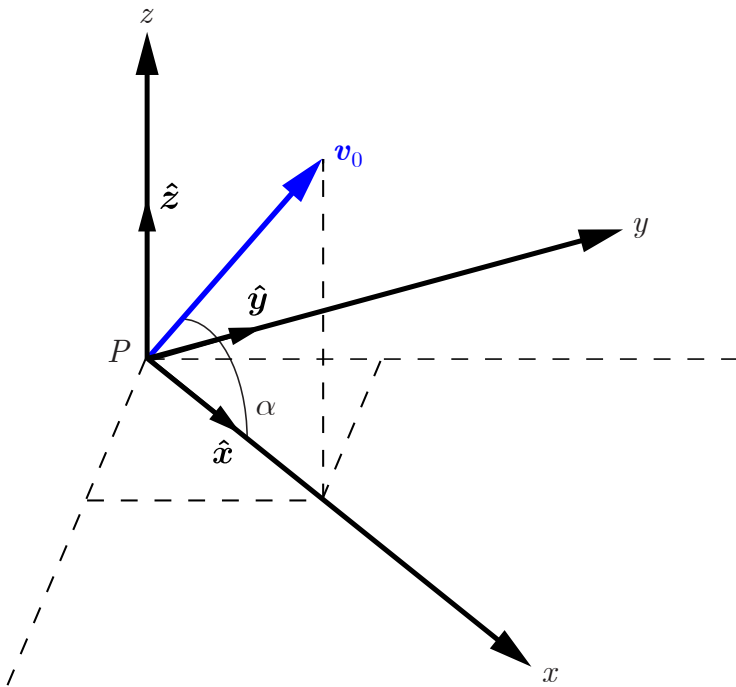
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.14)$$





- Une bille en acier est retenue par un électroaimant. Lorsque la bille est lâchée, un chronomètre s'enclenche. Une cellule photoélectrique est située à une hauteur $h = 1 \text{ [m]}$ au dessous de la bille. Au passage de la bille, le chronomètre se déclenche donnant le temps de chute expérimental t_c .

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{9.81}} \text{ s} = 0.452 \text{ s} \quad \text{temps de chute théorique}$$



• **Conditions initiales : position et vitesse**

① $x_0 = 0$ et $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$

② $y_0 = 0$ et $v_{0y} = 0$

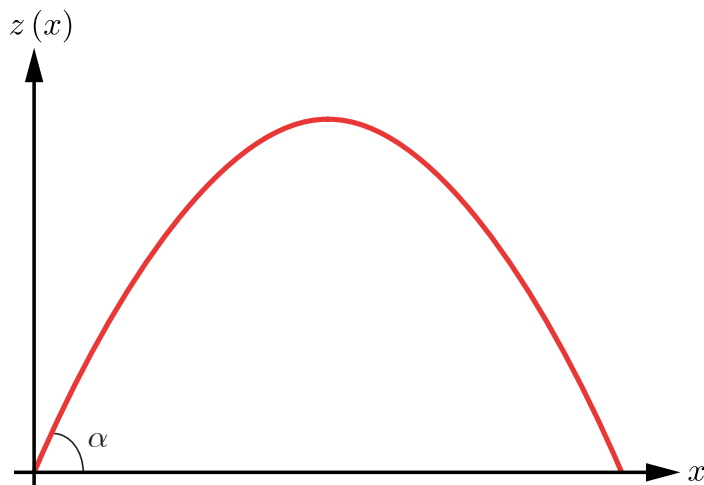
③ $z_0 = 0$ et $v_{0z} = v_0 \sin \alpha$

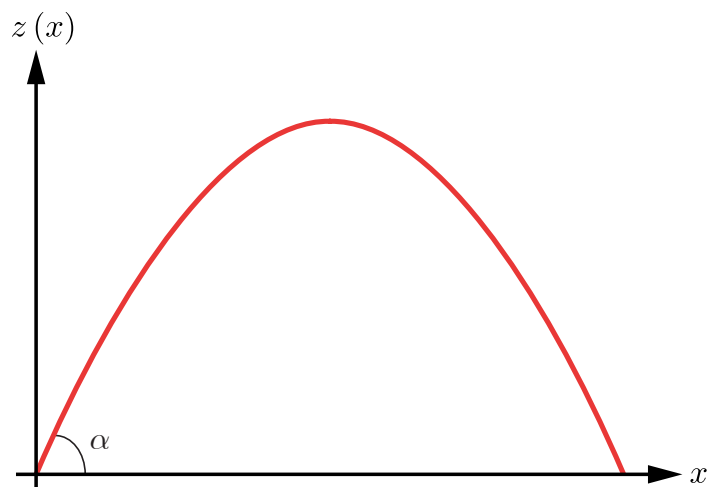
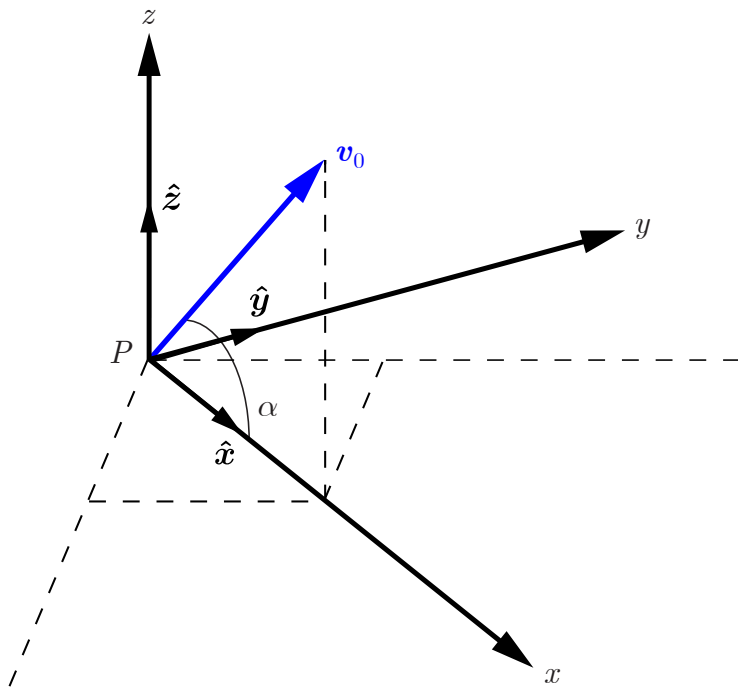
• **Equations horaires :**

① $x(t) = v_0 \cos \alpha t$

② $y(t) = 0$ (3.15)

③ $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$





- Equations horaires :

- 1 $x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad (3.15)$

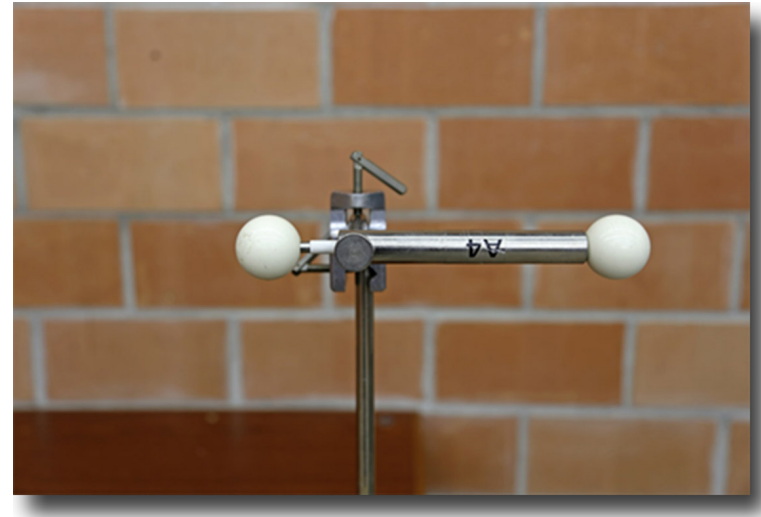
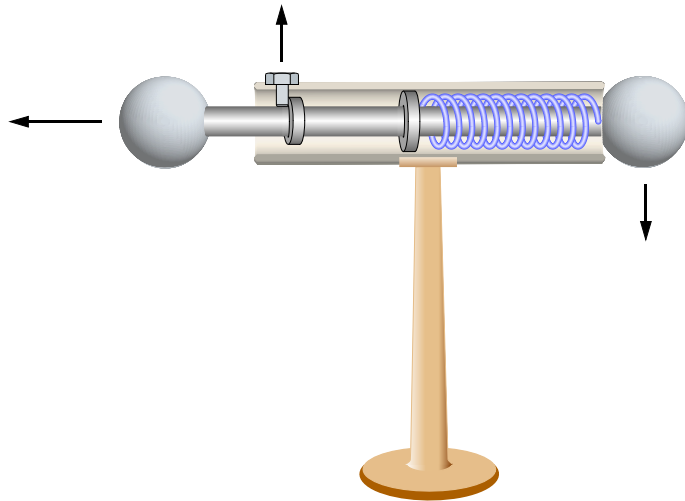
$$t(x) = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

- 3 $z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t$

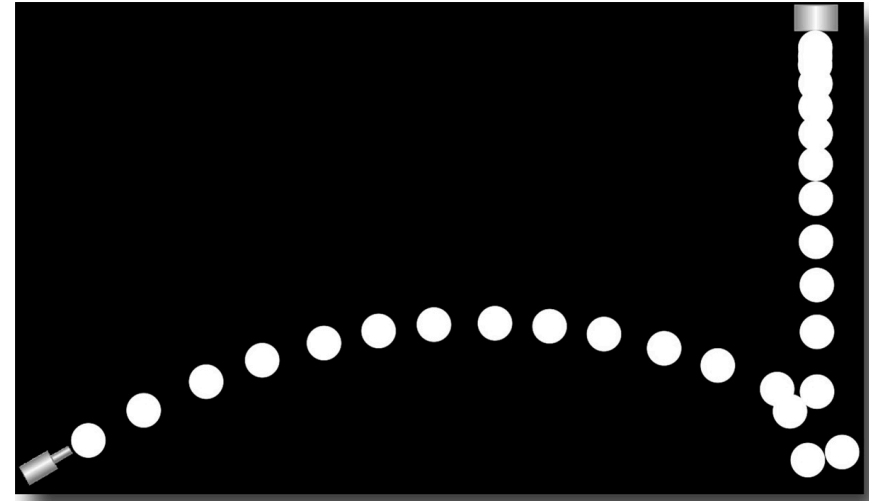
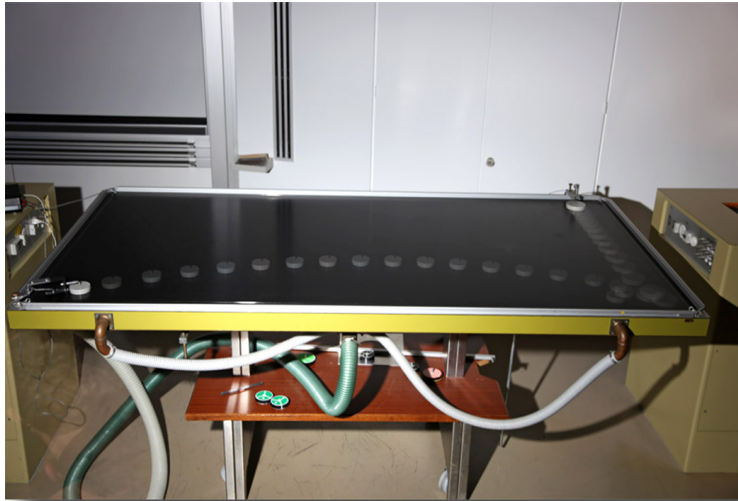
$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x$$

- Trajectoire : parabolique (plan Oxz)

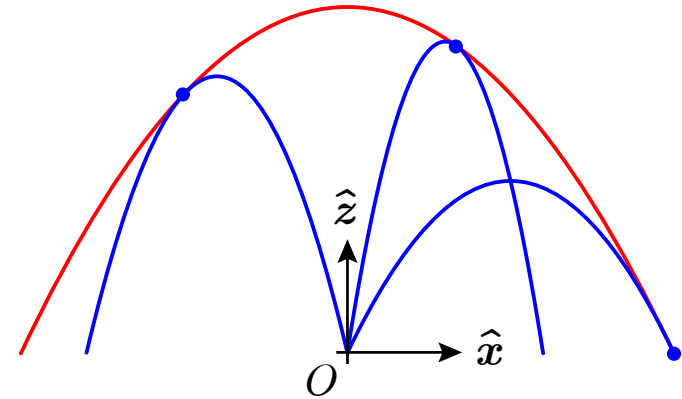
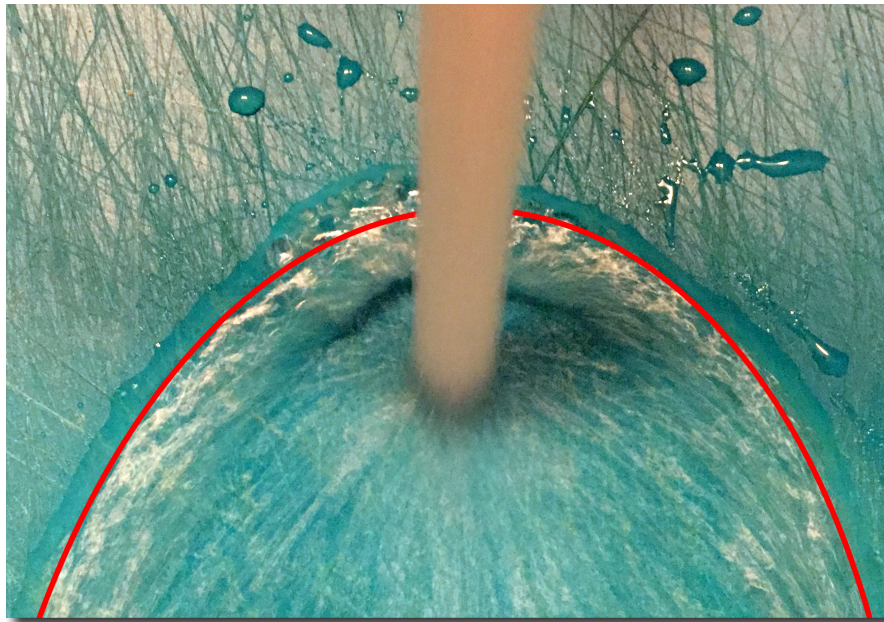
$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x \quad (3.16)$$



- Deux boules identiques sont initialement retenues à la même hauteur sur un appareil de jet. Les deux boules sont lâchées simultanément. Une boule lâchée sans vitesse initiale a un mouvement de chute libre vertical. L'autre boule lâchée avec une vitesse initiale horizontale a un mouvement balistique parabolique.
- Les deux boules touchent le sol en même temps car la projection de leur mouvement selon l'axe vertical est identique. On entend donc un seul choc.



- Deux pucks sont initialement retenus aux coins opposés d'une table à air inclinée. Le puck en bas à gauche est lancé dans la ligne de visée du puck en haut à droite.
- Si le puck en haut à droite est lâché sans vitesse initiale au même instant où l'autre puck est lancé, les deux pucks entrent en collision.
- L'inclinaison de la table d'un angle α par rapport au plan horizontal donne lieu à une accélération constante $g \sin \alpha = \text{cste}$ dirigée dans le plan de la table vers le bas.



- Lorsque le jet d'eau atteint la surface inclinée bleu, les normes des vitesses des gouttes d'eau sont comparables mais leur mouvement a lieu aléatoirement dans toutes les directions.
- L'enveloppe des trajectoires balistiques de toutes les gouttes d'eau est une parabole appelé "la parabole de sécurité" dont le foyer se trouve au point d'impact O du jet d'eau.

3.3 Balistique avec frottement

- 3.3.1 Loi du mouvement balistique
- 3.2.2 Repère et conditions initiales
- 3.3.3 Equations du mouvement balistique
- 3.3.4 Mouvement balistique horizontal
- 3.3.5 Mouvement balistique vertical

- **Loi du mouvement balistique avec frottement visqueux :**

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a} \quad (3.17)$$

- **Poids :**

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} \quad (3.5)$$

- **Force de frottement visqueux :** loi de Stokes en régime laminaire

$$\mathbf{F}_f = -b \mathbf{v} \quad \text{où} \quad b > 0 \quad (3.3)$$

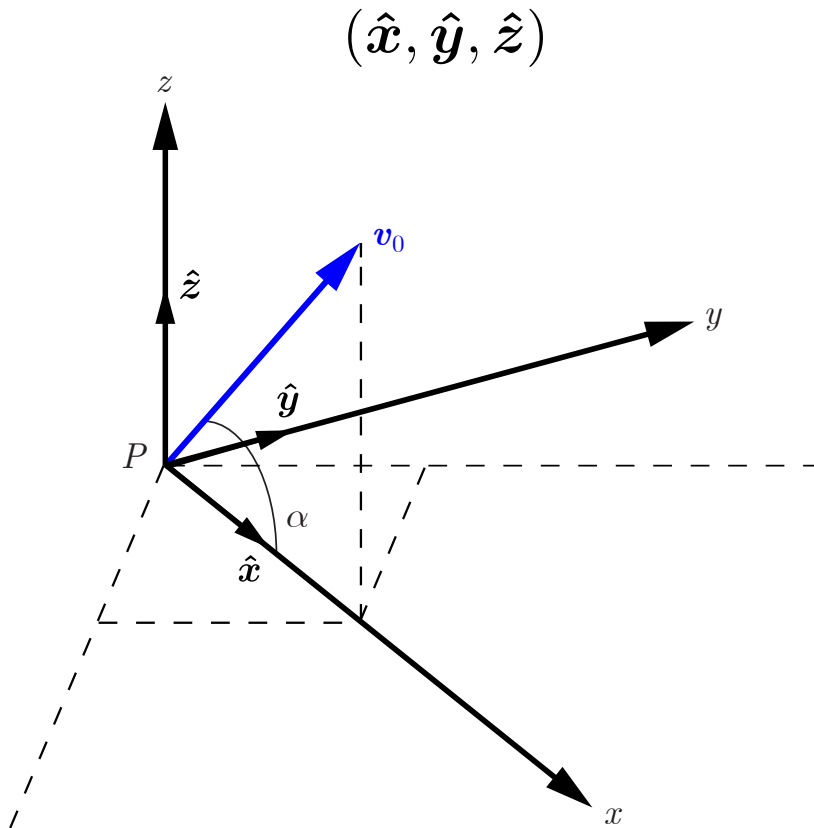
- **Loi du mouvement balistique avec frottement :**

$$m \mathbf{g} - b \mathbf{v} = m \mathbf{a} \quad (3.18)$$

La loi du mouvement balistique avec frottement dépend de la masse m contrairement à la loi sans frottement.

- Intuitivement, on comprend que la force de frottement visqueux $\mathbf{F}_f$ provoque à une décroissance exponentielle de la vitesse $\mathbf{v}$ dans la direction horizontale car l'équation différentielle du mouvement (3.18) contient la vitesse $\mathbf{v}$ et sa dérivée temporelle l'accélération $\mathbf{a}$.

Repère cartésien



- Position initiale : $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

- 1 $x(0) = 0$
- 2 $y(0) = 0$
- 3 $z(0) = 0$

$$(3.19)$$

- Vitesse initiale : $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$

- 1 $\dot{x}(0) = v_x(0) = v_{0x}$
- 2 $\dot{y}(0) = v_y(0) = 0$
- 3 $\dot{z}(0) = v_z(0) = v_{0z}$

$$(3.20)$$

- **Loi du mouvement balistique avec frottement :**

$$m \mathbf{a} = m \mathbf{g} - b \mathbf{v} \quad (3.18)$$

- **Projections :** grandeurs vectorielles dans le repère cartésien

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{a} = \dot{v}_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{v}_y \hat{\mathbf{y}} + \dot{v}_z \hat{\mathbf{z}} = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}$$

- **Equations du mouvement :** (3.18) repère cartésien

$$\textcircled{1} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad m\ddot{x} = -b\dot{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad m\ddot{y} = -b\dot{y} \quad (3.21)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}$$

- **Equations du mouvement :** (3.18) repère cartésien

$$\textcircled{1} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad m\dot{v}_x = -bv_x$$

$$\textcircled{2} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad m\dot{v}_y = -bv_y \quad (3.21)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad m\dot{v}_z = -mg - bv_z$$

- **Equations du mouvement :**

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \text{selon } \hat{x} : \quad m\dot{v}_x = -bv_x \\
 \textcircled{2} \quad & \text{selon } \hat{y} : \quad m\dot{v}_y = -bv_y \\
 \textcircled{3} \quad & \text{selon } \hat{z} : \quad m\dot{v}_z = -mg - bv_z
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

- **Temps d'amortissement :** grandeur phénoménologique (définition)

$$\tau \equiv \frac{m}{b} \tag{3.22}$$

- **Equations du mouvement :** (3.22) dans (3.21)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \text{selon } \hat{x} : \quad \dot{v}_x = -\frac{1}{\tau} v_x \\
 \textcircled{2} \quad & \text{selon } \hat{y} : \quad \dot{v}_y = -\frac{1}{\tau} v_y \\
 \textcircled{3} \quad & \text{selon } \hat{z} : \quad \dot{v}_z = -g - \frac{1}{\tau} v_z
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

- **Equation du mouvement selon l'axe horizontal :**

$$\dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x \quad (3.23)$$

- **Equation différentielle :** (3.23) remise en forme

$$\frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (3.24)$$

- **Intégration :** de (3.24) par rapport au temps de 0 à t où $v_x(0) = v_{0x}$

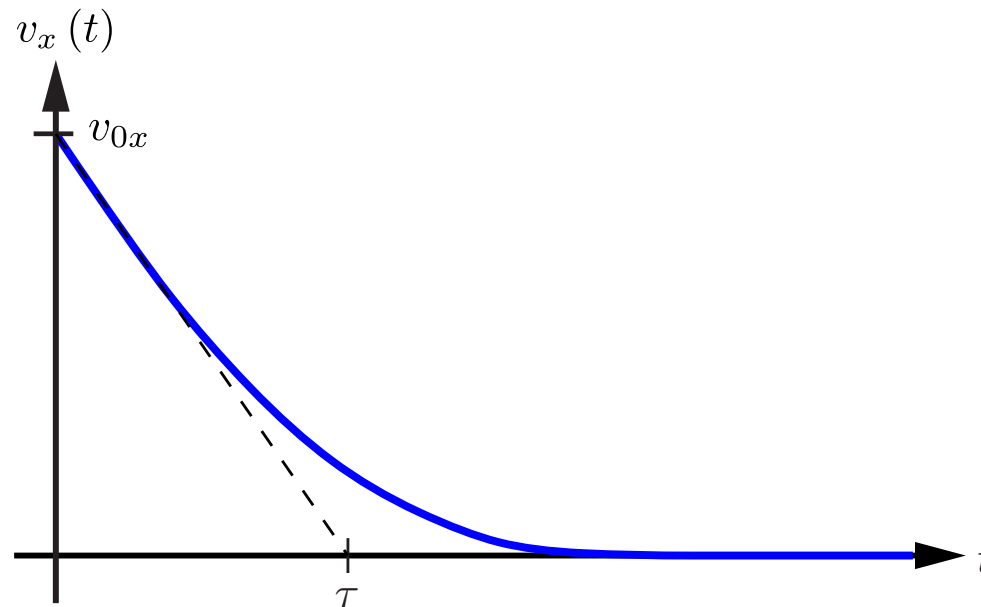
$$\int_{v_{0x}}^{v_x(t)} \frac{dv'_x(t')}{v'_x(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \quad (3.25)$$

- **Résultat :** de l'intégrale (3.25)

$$\ln(v_x(t)) - \ln(v_{0x}) = \ln\left(\frac{v_x(t)}{v_{0x}}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (3.26)$$

- Equation de la vitesse selon l'axe horizontal :

$$v_x(t) = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.27)$$



- Le temps d'amortissement τ est une mesure quantitative de la décroissance de la vitesse qui est de 63 %.

$$\frac{v_x(\tau)}{v_{0x}} = \exp(-1) = 0.37 = 37\% \quad (3.28)$$

- **Equation de la vitesse selon l'axe horizontal :**

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.27)$$

- **Equation différentielle :** (3.27) remise en forme

$$dx(t) = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \quad (3.29)$$

- **Intégration :** de (3.29) par rapport au temps de 0 à t où $x(0) = 0$

$$\int_0^{x(t)} dx'(t') = v_{0x} \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' \quad (3.30)$$

- **Résultat :** de l'intégrale (3.30)

$$x(t) = -v_{0x} \tau \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad (3.31)$$

- **Equation horaire selon l'axe horizontal :**

$$x(t) = v_{0x} \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (3.32)$$

- **Développement limité :** au 1^{er} ordre en $\frac{t}{\tau}$ autour de $\frac{t}{\tau} = 0$

$$\exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) = 1 - \frac{t}{\tau} \quad (3.33)$$

- **Asymptote oblique :** $x(t)$ si $t \ll \tau$

$$x(t) = v_{0x} t \quad (3.34)$$

- **Coordonnée horizontale limite :**

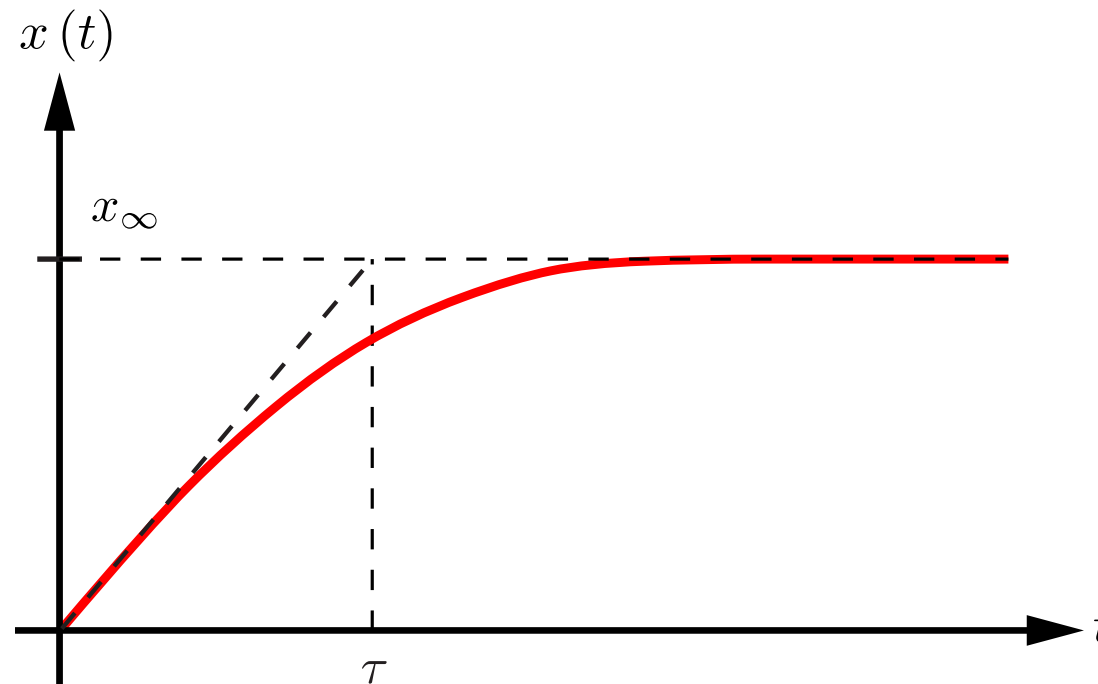
$$x_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v_{0x} \tau > 0 \quad (3.35)$$

- **Asymptote horizontale :** $x(t)$ si $t \gg \tau$

$$x(t) = v_{0x} \tau = x_{\infty} \quad (3.36)$$

- Equation horaire selon l'axe horizontal : (3.35) dans (3.32)

$$x(t) = x_{\infty} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (3.37)$$



- L'équation horaire selon l'axe horizontal est une interpolation entre l'asymptote oblique initiale $x(t) = v_{0x} t$ et l'asymptote horizontale finale $x(t) = x_{\infty}$.

- **Equation du mouvement selon l'axe vertical** : équation inhomogène

$$\dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\tau} v_z = -\frac{1}{\tau} (v_z + g\tau) \quad (3.38)$$

- **Changement de variable** : équation différentielle rendue homogène

$$u_z(t) = v_z(t) + g\tau \quad \text{ainsi} \quad \dot{u}_z = \dot{v}_z \quad (3.39)$$

- **Equation du mouvement selon l'axe vertical** : équation homogène

$$\dot{u}_z = \frac{du_z}{dt} = -\frac{1}{\tau} u_z \quad \text{ainsi} \quad \frac{du_z(t)}{u_z(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (3.40)$$

- **Intégration** : de (3.40) par rapport au temps de 0 à t où $v_z(0) = v_{0z}$

$$\int_{u_z(0)}^{u_z(t)} \frac{du'_z(t')}{u'_z(t')} = \int_{v_{0z} + g\tau}^{v_z(t) + g\tau} \frac{du'_z(t')}{u'_z(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \quad (3.41)$$

- **Résultat** : de l'intégrale (3.41)

$$\ln(v_z(t) + g\tau) - \ln(v_{0z} + g\tau) = \ln\left(\frac{v_z(t) + g\tau}{v_{0z} + g\tau}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (3.42)$$

- Equation de la vitesse selon l'axe vertical :

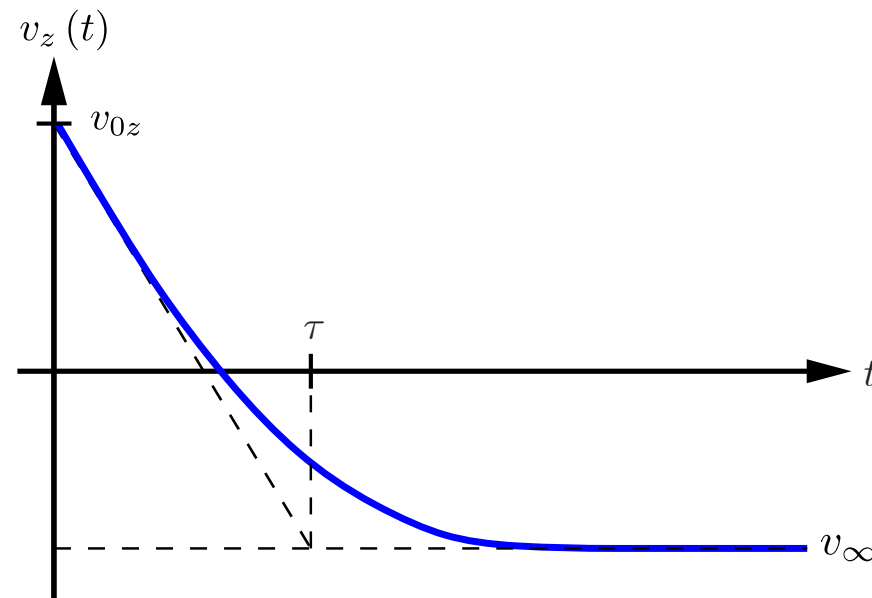
$$v_z(t) = (v_{0z} + g\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\tau \quad (3.43)$$

- Vitesse limite de chute : le frottement F_f compense le poids P

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = -g\tau < 0 \quad (3.44)$$

- Equation de la vitesse selon l'axe vertical :

$$v_z(t) = (v_{0z} - v_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_\infty \quad (3.45)$$



- **Vitesse limite de chute :**

$$v_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = -g\tau < 0 \quad (3.44)$$

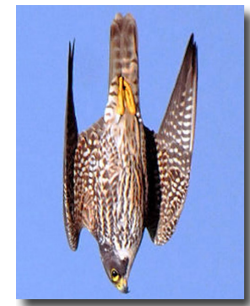
- **Temps d'amortissement et viscosité :** (3.3) et (3.22)

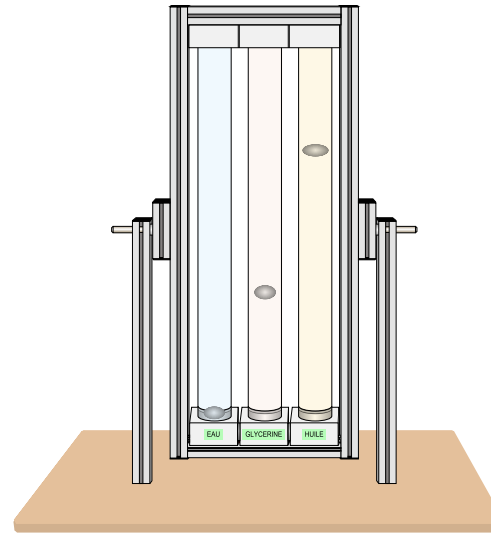
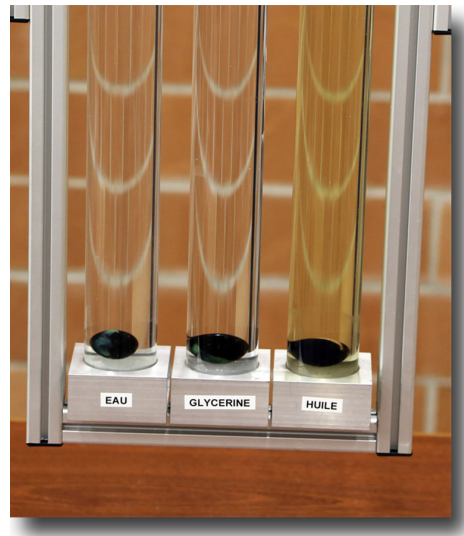
$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{m}{k\eta} = \text{cste} \quad (3.46)$$

- **Vitesse limite et viscosité :** (3.44) et (3.46)

$$v_{\infty} = -g\tau = -\frac{mg}{k\eta} = \text{cste} \quad (3.47)$$

- 1 Le temps d'amortissement τ de l'objet est inversement proportionnel à la viscosité η du fluide.
- 2 La vitesse limite v_{∞} de l'objet est inversement proportionnelle à la viscosité η du fluide.





- Trois boules identiques sont lâchées sans vitesse initiale d'une hauteur identique dans trois fluides différents : eau, glycérine, et huile dont les viscosités satisfont la relation d'ordre,

$$\eta_{\text{eau}} < \eta_{\text{glycérine}} < \eta_{\text{huile}}$$

- Etant donné que $\tau \propto 1/\eta$ et $v_{\infty} \propto 1/\eta$

$$\tau_{\text{huile}} < \tau_{\text{glycérine}} < \tau_{\text{eau}} \quad \text{et} \quad v_{\infty \text{ huile}} < v_{\infty \text{ glycérine}} < v_{\infty \text{ eau}}$$

- La boule dans l'huile atteint très rapidement sa vitesse limite, la boule dans la glycérine atteint sa vitesse limite en fin de chute et l'eau n'a pas encore atteint sa vitesse limite en fin de chute.

- **Equation de la vitesse selon l'axe vertical :**

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = (v_{0z} - v_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_\infty \quad (3.45)$$

- **Equation différentielle :** (3.45) remise en forme

$$dz(t) = (v_{0z} - v_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt + v_\infty dt \quad (3.48)$$

- **Intégration :** de (3.48) par rapport au temps de 0 à t où $z(0) = 0$

$$\int_0^{z(t)} dz'(t') = (v_{0z} - v_\infty) \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' + v_\infty \int_0^t dt' \quad (3.49)$$

- **Résultat :** de l'intégrale (3.49)

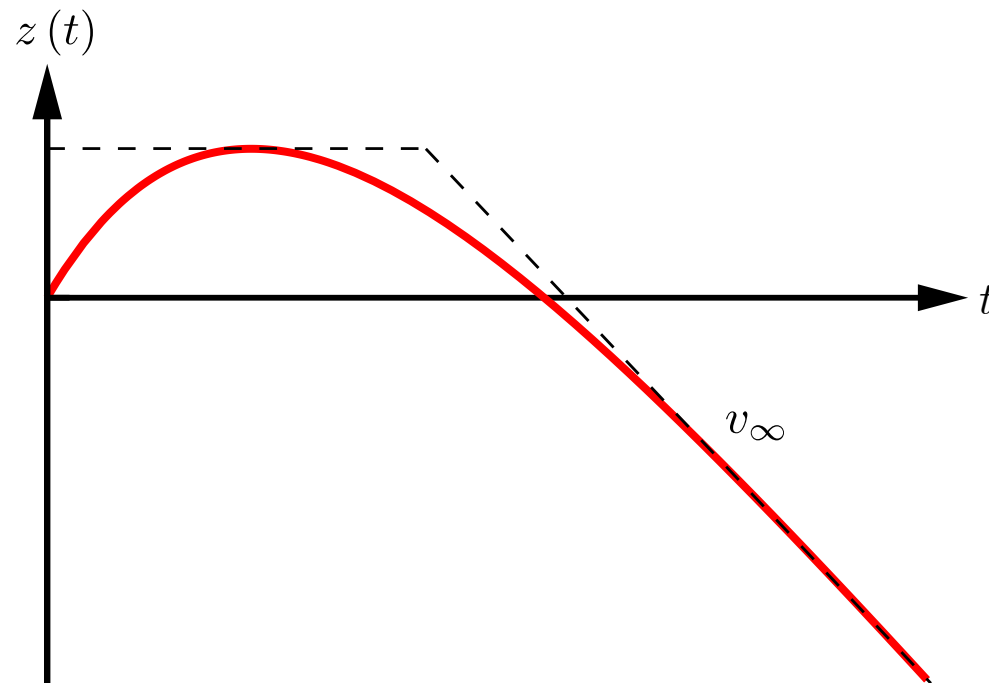
$$z(t) = - (v_{0z} - v_\infty) \tau \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} + v_\infty t' \Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad (3.50)$$

- Equation horaire selon l'axe vertical :

$$z(t) = (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) + v_{\infty} t \quad (3.51)$$

- Asymptote oblique : $z(t)$ si $t \gg \tau$

$$z(t) = v_{\infty} t + (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \quad \text{si} \quad t \gg \tau \quad (3.52)$$



- **Equation horaire selon l'axe horizontal :**

$$x(t) = x_{\infty} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (3.37)$$

- **Temps :** (3.37) inversée

$$t(x) = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{x_{\infty}} \right) \quad (3.53)$$

- **Equation horaire selon l'axe vertical :**

$$z(t) = (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) + v_{\infty} t \quad (3.51)$$

- **Equation de la trajectoire balistique :** (3.53) dans (3.51)

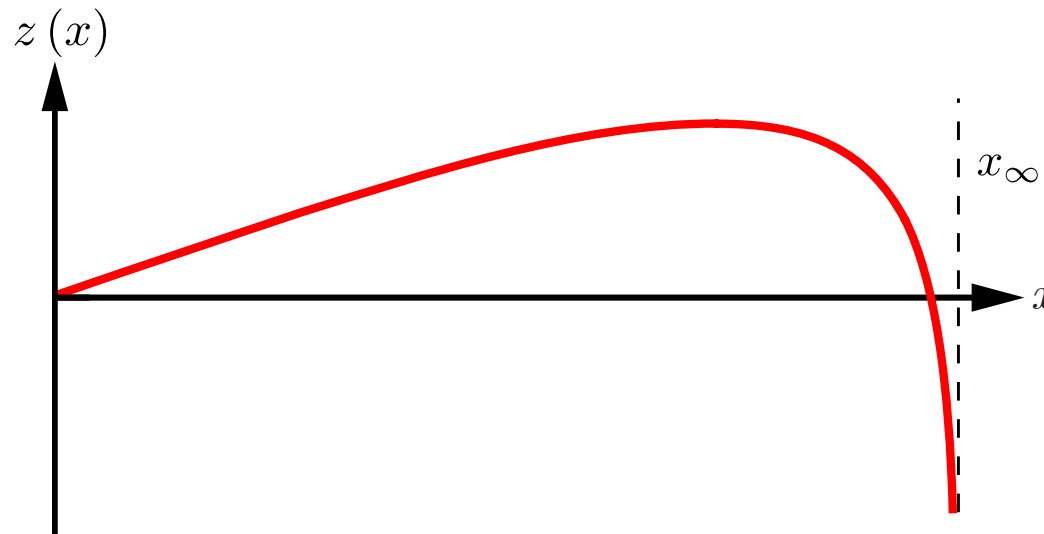
$$z(x) = (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \frac{x}{x_{\infty}} - v_{\infty} \tau \ln \left(1 - \frac{x}{x_{\infty}} \right) \quad (3.54)$$

- Equation de la trajectoire balistique :

$$z(x) = (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \frac{x}{x_{\infty}} - v_{\infty} \tau \ln \left(1 - \frac{x}{x_{\infty}} \right) \quad (3.54)$$

- Asymptote verticale : argument du logarithme > 0

$$x = x_{\infty} \quad (3.55)$$



- La force de frottement visqueux F_f empêche l'objet d'aller au-delà de l'asymptote verticale.